三角比の値を方程式から求める

POINT

$\dfrac{\pi}{3}$ や $\dfrac{\pi}{4}$ などの「有名角」以外の角，例えば $\dfrac{\pi}{10}$ や $\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{2}{7}\pi$ などの三角比の値を求めさせる問題は良く出題される。

本問は，$\sin\dfrac{\pi}{10}$ が満たす方程式を立式することで，その値を求めさせる問題である。

具体的には，$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ が満たす条件 (5 倍すると $\dfrac{\pi}{2}$ になる) から三角比に関する等式を立て，2 倍角や 3 倍角の公式を用いて式を変形し，$\sin\dfrac{\pi}{10}$ を求めるのである。

三角比の値を方程式から求める

解説

(1) $\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ のとき　$5\theta = \dfrac{\pi}{2}$

よって　$2\theta = \dfrac{\pi}{2} - 3\theta$

が成り立つから　$\cos 2\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \sin 3\theta$

ゆえに，与式は成り立つ。

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ のとき，(2) より

$\cos 2\theta = \sin 3\theta$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ と (1) より

$1-2\sin^2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

よって　$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

因数分解すると　$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに　$\sin\theta = 1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

ここで　$0 < \sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{10} < 1$ より

$\sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

したがって　$\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$