末尾の数と余りの関係

POINT

方程式の整数解を求める際，その根底にあるのは「必要条件を用いて候補を絞り，その中で題意を満たすものをしらみつぶしに探していく」という考え方である。
このとき，「候補を絞る」のに有効とされる式の形がある。それは，次の2つである。

① (整数)×(整数)＝(整数)

② $(\text{整数})^2+(\text{整数})^2=(\text{整数})$

与えられた式をただ闇雲に変形するのではなく，まずは①または②の形に変形できないかを考えるのは1つのアイデアである。

解説

(1) (a)
$$\begin{aligned}2x^2+11xy+12y^2-5y-2&=2x^2+11xy+(4y+1)(3y-2)\\&=(x+4y+1)(2x+3y-2)\end{aligned}$$

(b)
$$2x^2+11xy+12y^2-5y+5=0$$

より　$2x^2+11xy+12y^2-5y-2=-7$

よって　$(x+4y+1)(2x+3y-2)=-7$

$x+4y+1$，$2x+3y-2$ は整数であるから

$$(x+4y+1,\ 2x+3y-2)=(1,\ -7),\ (7,\ -1),\ (-1,\ 7),\ (-7,\ 1)$$

したがって

$$(x,\ y)=(-4,\ 1),\ \left(-\frac{14}{5},\ \frac{11}{5}\right),\ \left(\frac{42}{5},\ -\frac{13}{5}\right),\ \left(\frac{36}{5},\ -\frac{19}{5}\right)$$

x，y は整数より　$(x,\ y)=(-4,\ 1)$

末尾の数と余りの関係

解説

(2) $$x^2-2xy+2y^2-6x+13=0$$

を x について整理すると

$$x^2-2(y+3)x+2y^2+13=0$$

よって　$\{x-(y+3)\}^2-(y+3)^2+2y^2+13=0$

となり，これを整理すると

$$(x-y-3)^2+y^2-6y+4=0$$

したがって　$(x-y-3)^2+(y-3)^2-5=0$

となり　$(x-y-3)^2=5-(y-3)^2$　……①

が得られる。

ここで，$(x-y-3)^2\geqq 0$ より　$5-(y-3)^2\geqq 0$

よって　$(y-3)^2\leqq 5$

となり，これを満たす整数 y の値は　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

[1]　$y=1$ のとき　① より　$(x-4)^2=5-(-2)^2=1$

よって　$x-4=\pm 1$ より $x=3,\ 5$

[2]　$y=2$ のとき　① より　$(x-5)^2=5-(-1)^2=4$

よって　$x-5=\pm 2$ より $x=3,\ 7$

[3]　$y=3$ のとき　① より　$(x-6)^2=5-0^2=5$

よって　$x-6=\pm\sqrt{5}$ より $x=6\pm\sqrt{5}$

これは x が整数であるという条件に合わない。

[4]　$y=4$ のとき　① より　$(x-7)^2=5-1^2=4$

よって　$x-7=\pm 2$ より $x=5,\ 9$

[5]　$y=5$ のとき　① より　$(x-8)^2=5-2^2=1$

よって　$x-8=\pm 1$ より $x=7,\ 9$

[1]～[5] より，求める整数 x，y の組は

$$(x,\ y)=(3,\ 1),\ (5,\ 1),\ (3,\ 2),\ (7,\ 2),\ (5,\ 4),\ (9,\ 4),\ (7,\ 5),\ (9,\ 5)$$